Contrôle Continu 7/12/22

Durée : 2h
Documents, téléphones portables et appareils électroniques interdits
La rédaction et la clarté de l'argumentation sera prise en compte dans la notation

Exercice 1 (Autour du cours)
Soit G un groupe fini. Montrer que G admet une représentation fidèle.

Exercice 2 (Un polynôme irréductible ?)
Soit $n \geq 1$ un entier. Est-ce que le polynôme $X^{2n} - Y^n X^n + Y$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$?

Exercice 3 (Un peu de corps fini)
Soit $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ le corps à deux éléments.

1. Donner tous les polynômes irréductibles de degré 1, 2 et 3 sur $\mathbb{F}_2$.
2. Soit $K_1 = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ et $K_2[X] = \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$. On notera α la classe de X dans K_1 et β la classe de X dans K_2.
   (a) Justifier que K_1 et K_2 sont des corps.
   (b) Sans donner un isomorphisme, justifier que K_1 et K_2 sont isomorphe.
   (c) Donner un isomorphisme de K_2 vers K_1 (on pourra vérifier que $\alpha^6 = \alpha^2 + 1$).
3. Calculer l'inverse de $\beta + 1$ dans K_2.

Exercice 4 (Corps de rupture d'indices premier entre eux)
Soient k un corps et $P, Q \in k[X]$ deux polynômes irréductibles de degré respectif n et m avec n et m premiers entre eux. Soit K un corps de rupture de P sur k. On souhaite montrer que Q est irréductible sur K. Soit R un facteur irréductible de Q dans $K[X]$ et L un corps de rupture de R sur K.

1. Justifier que $n \mid [L : k]$.
2. Justifier que $m \mid [L : k]$.
3. En déduire que $[L : k] = mn$.
4. Conclure.

Exercice 5 (Étude d'une extension)
Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{3})$ et $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

1. Montrer que $[L : \mathbb{Q}] = 4$ et donner, en le justifiant, une base de L en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.
3. Donner, en le justifiant, le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6 (Étude des automorphismes d'une extension)
Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ n'admet pas d'automorphisme non trivial.
2. On souhaite donner tous les automorphismes de L.
   (a) Donner toutes les racines de $X^3 - 2$ dans L.
   (b) Donner tous les automorphismes de L fixant $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
   (c) Conclure.